

TD N°1 : Les séries numériques

Exercice 1*Etudier la convergence des séries :*

1. $\sum_{n \geq 1} \ln(\cos(\frac{1}{n}))$
2. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \left((1 + \frac{1}{n})^{-n} - \frac{1}{e} \right)$
3. $\sum_{n \geq 2} \ln(n)^{-\ln(n)}$
4. $\sum_{n \geq 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
5. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + (-1)^n}\right)$

Exercice 2*Montrez que pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$:*

1. $\sum_n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$.
2. $\sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$.

Exercice 3

1. Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^n \ln(k)$
2. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2} \ln(n)^2 \right)_{n \geq 1}$ converge et trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)^{-\frac{1}{2 \ln n}}$

Exercice 4 Pour tout $\alpha > 1$, on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Montrer que $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \zeta(\alpha) = 1$.

Exercice 5

1. Déterminez en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$.
2. Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 6

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
2. Soit $u_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 7

Etudier la convergence des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
2. $\sum_{n \geq 1} e^{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} - 1$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$, avec $\alpha > 0$

Exercice 8

Etudier la convergence des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n \cos n}{n\sqrt{n} + \sin n}$.

Exercice 9 Soit $\alpha > 0$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ et vérifiez que :

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$$

2. Trouver un équivalent de R_n et déduire que $\sum R_n$ converge.

Exercice 10

Justifier que $\sum u_n$ converge et calculer la somme dans les cas suivants

1. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!}$
2. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$

Exercice 11 Soit, pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

1. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum u_n$ ne converge pas.
2. Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par : $\sigma(n) = \begin{cases} 2p & \text{si } n = 3p, \\ 4p+1 & \text{si } n = 3p+1, \\ 4p+3 & \text{si } n = 3p+2. \end{cases}$ Montrez que σ est une permutation de l'ensemble $\mathbb{N}$. Que peut-on déduire concernant la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$?

Exercice 12

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et positive. On pose : $v_n = nu_{n^2}$. Montrer que :

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum v_n \text{ converge.}$$

2. En utilisant le principe de condensation de Cauchy, montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min(u_n, 1/n)$ diverge aussi.

Exercice 13 On considère une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que la dérivée f' est bornée sur $[1, +\infty[$.

1. Vérifier que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est divergente et montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_1^n f(t) dt$$

2. Application : Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \ln k$ et de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Exercice 14

Etudier la convergence de la série $\sum \sin(n!\pi e)$

Exercice 15

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Montrer que $\sum f(n)$ converge.
2. Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$

Exercice 16 Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers : $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$

1. Pour $\alpha > 1$, montrer que $\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$ admet une limite strictement positive L lorsque N tend vers l'infini. On la note

$$L = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$$

2. Montrer que : $\sum_{k=1}^{p_N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
3. En déduire que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)}$.
4. Montrer que la minoration de gauche de la deuxième question reste valable lorsque $\alpha = 1$. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 17 Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit la suite des différences $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls, décroissante et convergente vers 0. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$,

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} \Delta^k u_0 \right) + \frac{1}{2^p} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Delta^p u_n$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$, $(-1)^p f^{(p)}(x) \geq 0$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n) = \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{4} \Delta f(0) + \dots + \frac{1}{2^p} \Delta^{p-1} f(0) + R_p$$

avec $|R_p| \leq \frac{1}{2^p} |\Delta^p f(0)|$. La série $\sum (\frac{1}{2})^{k+1} \Delta^k f(0)$ est la transformée d'Euler de la série $\sum (-1)^n f(n)$.